PART3　2次方程式の共通解

3 k を実数の定数とし，2 つの 2 次方程式 $x^2-x+k-4=0$，$x^2+3x-k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

Point Pickup

2 つの 2 次方程式に共通解が存在するとき, その共通解を $x=\alpha$ とおき, 2 つの 2 次方程式にそれぞれ代入して，α と k の連立方程式として解く。

求めた値が問題の条件を満たすかの確認が必要。

第 5 講　PART3　確認問題

1　k を実数の定数とし，2 つの 2 次方程式

$x^2-x+k=0$，$x^2-3x-k-6=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

$k=$ [アイ]，共通解 $x=$ [ウ]　または

$k=$ [エオ]，共通解 $x=$ [カキ]

PART3　2次方程式の共通解

3　k を実数の定数とし，2 つの 2 次方程式 $x^2-x+k-4=0$，$x^2+3x-k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

共通な実数解を α とおき，2 つの 2 次方程式に代入すると

$$\alpha^2-\alpha+k-4=0 \cdots\cdots ①，\alpha^2+3\alpha-k=0 \cdots\cdots ②$$

① ＋ ②より

$$2\alpha^2+2\alpha-4=0 \qquad \alpha^2+\alpha-2=0 \qquad (\alpha+2)(\alpha-1)=0 \qquad \alpha=-2,\ 1$$

(i)　$\alpha=-2$ のとき

②より　$k=(-2)^2+3\cdot(-2)=-2$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$$x^2-x-6=0,\ x^2+3x+2=0$$

となり，それぞれの解は

$$(x+2)(x-3)=0 \qquad x=-2,\ 3$$

$$(x+2)(x+1)=0 \qquad x=-2,\ -1$$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=-2$ をもつ。

(ii)　$\alpha=1$ のとき

②より　$k=1^2+3\cdot1=4$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$$x^2-x=0,\ x^2+3x-4=0$$

となり，それぞれの解は

$$x(x-1)=0 \qquad x=0,\ 1$$

$$(x+4)(x-1)=0 \qquad x=-4,\ 1$$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=1$ をもつ。

(i)，(ii)より

$k=-2$，共通解 $x=-2$　または　$k=4$，共通解 $x=1$

第5講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-6，ウ：3，エオ：-2，カキ：-1

[解説]

共通な実数解を α とおき，2つの2次方程式に代入すると　$\alpha^2-\alpha+k=0$　……①　[A]

$\alpha^2-3\alpha-k-6=0$　……②

[A]　2つの2次方程式に共通解が存在するとき，その共通解を α とおき，2つの2次方程式にそれぞれ代入して，α と k の連立方程式として解く。

①＋②より，k を消去すると

$2\alpha^2-4\alpha-6=0$　　$\alpha^2-2\alpha-3=0$

$(\alpha-3)(\alpha+1)=0$　　$\alpha=3,\ -1$

(i)　$\alpha=3$ のとき

①より　$k=-3^2+3=-6$

このとき，2つの2次方程式は

$x^2-x-6=0,\ x^2-3x=0$

となり，それぞれの解は

$(x+2)(x-3)=0$　　$x=-2,\ 3$

$x(x-3)=0$　　$x=0,\ 3$

であるから，2つの2次方程式はただ1つの共通な実数解 $x=3$ をもつ。[B]

[B]　求めた値が問題の条件を満たすかどうか（共通解がただ1つであるかどうか）の確認が必要。

(ii)　$\alpha=-1$ のとき

①より　$k=-(-1)^2+(-1)=-2$

このとき，2つの2次方程式は

$x^2-x-2=0,\ x^2-3x-4=0$

となり，それぞれの解は

$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1,\ 2$

$(x+1)(x-4)=0$　　$x=-1,\ 4$

であるから，2つの2次方程式はただ1つの共通な実数解 $x=-1$ をもつ。[B]

(i)，(ii)より　**$k=-6$，共通解 $x=3$ または**

$k=-2$，共通解 $x=-1$